

DOI: 10.7652/xjtuxb201304007

低密度奇偶校验码加权大数逻辑译码研究

张立军, 刘明华, 卢萌

(北京交通大学电子信息工程学院, 100044, 北京)

摘要: 针对低密度奇偶校验(LDPC)码加权大数逻辑(WMLG)译码物理意义问题,提出了一种基于最大对数最大后验概率(max-log MAP)译码的推导方法。该方法利用幂求和的对数近似表达式给出信息位的对数似然比(LLR),理论证明了 WMLG 译码与 max-log MAP 译码的等价性。仿真结果也进一步表明,与 MAP 译码相比,max-log MAP 译码的复杂度大为降低,而译码性能的损失微乎其微。WMLG 译码与 max-log MAP 译码的等价关系表明,基于 WMLG 译码的混合译码算法都可看作 max-log MAP 算法的改进,这对于设计 LDPC 码的新型混合译码算法有较好的指导作用。

关键词: 低密度奇偶校验码;加权大数逻辑;最大对数最大后验概率

中图分类号: TN911.22 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2013)04-0035-04

A Research on Weighted Majority-Logic Decoding for LDPC Codes

ZHANG Lijun, LIU Minghua, LU Meng

(School of Electronic and Information Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: A new derivation method of the weighted majority-logic (WMLG) decoding for low-density parity-check (LDPC) codes is proposed based on the maximum-logarithm (max-log) maximum a posteriori (MAP) decoding to illustrate the physical significance of WMLG decoding. The logarithm likelihood ratio (LLR) of information bit is approximated using the logarithm approximation to the sum of powers. Then it is theoretically proved that the WMLG decoding is identical to the max-log MAP decoding. Furthermore, the simulation results show that the max-log MAP decoding has almost the same error performance as the MAP decoding has, while the complexity is greatly reduced. The equivalence between the WMLG decoding and the max-log MAP decoding shows that all WMGL-based hybrid decoding algorithms can be regarded as revised versions of the max-log MAP decoding, which gives a guide to devise new hybrid decoding algorithms of LDPC codes.

Keywords: low-density parity-check codes; weighted majority-logic; max-log maximum a posteriori

低密度奇偶校验(LDPC)码是一类重要的线性分组码^[1],由于其近 Shannon 限的性能,在实际中获得了广泛应用。在高速数据传输的场合,如光传送网(OTN)中,由于数据率极高(通常为 40 Gb/s 以上),因此为了保证传输的可靠性,需要采用较长的 LDPC 码,其长度通常为数千比特甚至更长。在

这种条件下,如何选择合适的译码算法,以实现快速高效的译码,成为解决问题的关键。LDPC 码的经典译码算法主要包括硬判决译码与软判决译码。比特翻转(BF)算法^[1]属于典型的硬判决译码,而和积算法(SPA)^[1]则是软判决译码的代表。纯粹的软判决译码,尽管性能好,但复杂度高,在码长较大时难

收稿日期: 2012-10-12。 作者简介: 张立军(1974—),男,副教授。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61172022)。

网络出版时间: 2013-01-10

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20130110.1159.004.html>

以实现,而硬判决译码虽然实现容易,但性能又不尽如人意。近年来出现的混合译码算法,结合了硬判决与软判决译码的优点,其复杂度和性能介于二者之间,特别适合上述高速数据传输的应用场景。目前,有关混合译码算法的研究较多,并已经出现了若干性能优异的算法^[2-12],如加权比特翻转(WBF)算法^[2]、改进的加权比特翻转(IWBF)算法^[3]、基于可靠度的大数逻辑译码^[8]和混合加权比特翻转译码^[12]等。这些混合译码算法的基础均为加权大数逻辑(WMLG)译码^[2]或者其改进算法。因此,深入研究 WMLG 算法,进一步揭示其物理意义,有助于新型混合算法的设计,从而更好地实现译码性能与复杂度之间的折中。

1 WMLG 译码算法的传统推导

考虑由 m 行、 n 列、行重为 ρ 、列重为 γ 的稀疏校验矩阵 $\mathbf{H}$ 的零空间给出的 LDPC 码 C ,令 $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{m-1}$ 表示校验矩阵 $\mathbf{H}$ 的行,其中 $\mathbf{h}_i = (h_{i,0}, h_{i,1}, \dots, h_{i,n-1})$ 是伽罗华域 GF(2) 上的一个 n 重向量。对于 $0 \leq i < m$ 和 $0 \leq j < n$,定义下面 2 个索引集合^[8]

$$N_i = \{j: 0 \leq j < n, h_{ij} = 1\} \quad (1)$$

$$M_j = \{i: 0 \leq i < m, h_{ij} = 1\} \quad (2)$$

集合 N_i 中的元素表示矩阵 $\mathbf{H}$ 的第 i 行中元素“1”的列位置,即参与第 i 个校验方程的所有比特位置的集合;集合 M_j 中的元素表示矩阵 $\mathbf{H}$ 的第 j 列中元素“1”的行位置,即包含第 j 比特的所有校验方程位置的集合。由集合的定义可知,集合 N_i 的势为 ρ ,等于 $\mathbf{H}$ 的行重,集合 M_j 的势为 γ ,等于 $\mathbf{H}$ 的列重。

假设发送 C 中的一个码字 $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$,传输采用二进制相移键控(BPSK)调制,调制后的码字序列可表示为 $(2u_0 - 1, 2u_1 - 1, \dots, 2u_{n-1} - 1)$,经过二元输入加性白色高斯噪声(Bi-AWGN)信道传输,接收的实数序列 $\mathbf{r} = (r_0, r_1, \dots, r_{n-1})$,其中 $r_j = (2u_j - 1) + \sigma_j$ 。若 σ_j 是均值为 0、方差为 $N_0/2$ 的高斯随机变量,则接收值 r_j 服从高斯分布, $r_j \sim N(\pm 1, N_0/2)$,根据判决规则

$$\begin{cases} z_j = 0, & r_j \leq 0 \\ z_j = 1, & r_j > 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中: $0 \leq j < n$;硬判决序列为 $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ 。令 S_j 表示参与校验 z_j 的所有校验方程的集合,即^[2]

$$S_j = \{A_{j,i} = \mathbf{z}\mathbf{h}_i: i \in M_j\} \quad (4)$$

由 LDPC 码的行列约束条件可知^[2],除 z_j 外其他接收比特最多包含在 S_j 中的一个校验方程中,因此

S_j 中的校验方程被称为在 z_j 比特上正交。

最大后验概率(MAP)译码按照下面的判决准则进行译码^[2]

$$\hat{u}_j = \arg \max_{u_j \in \{0,1\}} P(u_j | \mathbf{r}) \quad (5)$$

即当概率 $P(u_j = 1 | \mathbf{r}) > P(u_j = 0 | \mathbf{r})$ 时, u_j 译为 1,即 $\hat{u}_j = 1$;反之, $\hat{u}_j = 0$,其中 $P(u_j | \mathbf{r})$ 是信息比特 u_j 的后验概率(APP)。对数似然比(LLR)定义为

$$\Lambda_j = \ln \frac{P(u_j = 1 | \mathbf{r})}{P(u_j = 0 | \mathbf{r})} \quad (6)$$

根据 LLR 的取值,MAP 译码判决准则为

$$\begin{cases} \hat{u}_j = 1, & \Lambda_j \geq 0 \\ \hat{u}_j = 0, & \Lambda_j < 0 \end{cases} \quad (7)$$

若发送信号等概率分布,则 MAP 译码等价于最大似然(ML)译码,LLR 可简化为^[2]

$$\Lambda_j = \ln \frac{P(\mathbf{r} | u_j = 1)}{P(\mathbf{r} | u_j = 0)} \quad (8)$$

对于 LDPC 码,用接收序列 $\mathbf{r}$ 的硬判决结果的校验和代替接收序列,则 LLR 为

$$\Lambda_j = \ln \frac{P(S_j | u_j = 1)}{P(S_j | u_j = 0)} \quad (9)$$

由于 S_j 中的各个校验方程 $A_{j,i}$ 互不相交,可得

$$\ln(P(S_j | u_j)) = \sum_{i \in M_j} \ln(P(A_{j,i} | u_j)) \quad (10)$$

令 α_i 表示参与校验方程 $A_{j,i}$ 的所有比特中发生奇数个独立错误的概率,可以证明^[1]

$$\begin{aligned} \alpha_i &= P(A_{j,i} = 1 | u_j = 0) = \\ P(A_{j,i} = 0 | u_j = 1) &= \frac{1}{2} \left[1 - \prod_{l \in N_i} (1 - 2p_l) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

式中: p_l 表示参与校验方程 $A_{j,i}$ 的第 l 比特发生错误的概率。从式(11)可以看出, α_i 也表示信息比特 u_j 与校验和取值不同的概率,所以信息比特 u_j 与校验和取值相同的概率为 $1 - \alpha_i$,即参与校验方程 $A_{j,i}$ 的错误比特个数为偶数的概率^[1]

$$\begin{aligned} 1 - \alpha_i &= P(A_{j,i} = 0 | u_j = 0) = \\ P(A_{j,i} = 1 | u_j = 1) &= \frac{1}{2} \left[1 + \prod_{l \in N_i} (1 - 2p_l) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

结合式(11)和(12),可得

$$\begin{aligned} \Lambda_j &= \sum_{i \in M_j} \ln \left(\frac{P(A_{j,i} | u_j = 1)}{P(A_{j,i} | u_j = 0)} \right) = \\ &= \sum_{i \in M_j} (2A_{j,i} - 1) \ln \left(\frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

在 AWGN 信道中,参与校验方程 $A_{j,i}$ 的第 l 比特发生错误的概率 p_l 可表示为^[2]

$$p_l = \frac{\exp(-|L_l|)}{1 + \exp(-|L_l|)} \quad (14)$$

式中: $L_l = 4r_l/N_0$ 表示接收符号 r_l 的对数似然比。利用近似关系

$$\prod_{l \in N_i} (1 - 2p_l) \approx 1 - 2 \max_{l \in N_i} p_l \quad (15)$$

可得

$$\alpha_i \approx \frac{\exp(-4 |r_i|_{\min}/N_0)}{1 + \exp(-4 |r_i|_{\min}/N_0)} \quad (16)$$

式中: $|r_i|_{\min} = \min_{l \in N_i} \{|r_l|\}$ 。进一步可得

$$\frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \approx$$

$$\frac{1 - \exp(-4 |r_i|_{\min}/N_0) / [1 + \exp(-4 |r_i|_{\min}/N_0)]}{\exp(-4 |r_i|_{\min}/N_0) / [1 + \exp(-4 |r_i|_{\min}/N_0)]} = \exp(4 |r_i|_{\min}/N_0) \quad (17)$$

两边取对数,可得

$$\ln\left(\frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i}\right) \approx \frac{4}{N_0} |r_i|_{\min} \quad (18)$$

将式(18)代入式(13),并考虑到 $4/N_0 > 0$, 去掉该项不影响判决结果,可得

$$\Lambda_j = \sum_{i \in M_j} \ln\left(\frac{P(A_{j,i} | u_j = 1)}{P(A_{j,i} | u_j = 0)}\right) \approx \sum_{i \in M_j} (2A_{j,i} - 1) |r_i|_{\min} \quad (19)$$

然后根据式(7)进行判决,这种译码算法称为加权大数逻辑(WMLG)译码算法^[13]。

上面的推导过程表明,利用近似关系式(15),可从 MAP 译码推出 WMLG 算法,尽管后者可以看作 MAP 译码的一种近似,但这种推导并未明确揭示 WMLG 与现有 MAP 近似算法(如最大对数(max-log) MAP)译码的关系。

2 WMLG 与 max-log MAP 的等价性

Max-log MAP 是经典的 MAP 近似算法^[14],虽然是次最优算法,但具有更高的计算效率。由于 WMLG 算法也是 MAP 算法的近似,容易令人联想到 WMLG 与 max-log MAP 算法是否有内在的必然联系,因此先将上文 MAP 算法中的式(11)和(12)表示成指数和的形式,再利用 max-log MAP 译码的推导方法,进而得出 WMLG 译码与 max-log MAP 译码等价的结论。

引理 1 $\log\left(\frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i}\right) \approx \frac{4}{N_0} |r_i|_{\min}$, 即式(18)成立。

证明 根据式(11)、(12),式(13)右侧的对数部分可写为

$$\frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} = \frac{1 + \prod_{l \in N_i} (1 - 2p_l)}{1 - \prod_{l \in N_i} (1 - 2p_l)} = \frac{1 + \prod_{l \in N_i} ((1 - p_l) - p_l)}{1 - \prod_{l \in N_i} ((1 - p_l) - p_l)} \quad (20)$$

式中: $(1 - p_l)$ 表示参与校验方程 $A_{j,i}$ 的第 l 比特正确的概率。在 AWGN 信道中,由式(14)可得

$$1 - p_l = \frac{1}{1 + \exp(-|L_l|)} \quad (21)$$

将式(14)、(21)代入式(20)中,并进行通分化简,可得

$$\frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} = \frac{\prod_{l \in N_i} (1 + \exp(-|L_l|)) + \prod_{l \in N_i} (1 - \exp(-|L_l|))}{\prod_{l \in N_i} (1 + \exp(-|L_l|)) - \prod_{l \in N_i} (1 - \exp(-|L_l|))} \quad (22)$$

对式(22)两边取对数,可得

$$\ln\left(\frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i}\right) = \ln \frac{\prod_{l \in N_i} (1 + \exp(-|L_l|)) + \prod_{l \in N_i} (1 - \exp(-|L_l|))}{\prod_{l \in N_i} (1 + \exp(-|L_l|)) - \prod_{l \in N_i} (1 - \exp(-|L_l|))} = \ln \frac{\exp(0) + \sum_{\substack{E_i \subseteq N_i \\ |E_i| \text{ 为偶数}}} \prod_{l \in E_i} \exp(-|L_l|)}{\sum_{\substack{E_i \subseteq N_i \\ |E_i| \text{ 为奇数}}} \prod_{l \in E_i} \exp(-|L_l|)} = \ln \frac{\exp(0) + \sum_{\substack{E_i \subseteq N_i \\ |E_i| \text{ 为偶数}}} \exp\left(\sum_{l \in E_i} -|L_l|\right)}{\sum_{\substack{E_i \subseteq N_i \\ |E_i| \text{ 为奇数}}} \exp\left(\sum_{l \in E_i} -|L_l|\right)} \quad (23)$$

将多项式展开,合并同类项后,分子即是从集合 $\{\exp(-|L_l|), l \in N_i\}$ 中任取偶数项相乘的所有组合的求和(包括 $\exp(0)$, 相当于取 0 项),分母是从该集合中任取奇数项相乘的所有组合的求和。利用近似关系^[14]

$$\ln(\exp(\delta_1) + \exp(\delta_2) + \cdots + \exp(\delta_k)) \approx \max(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k) \quad (24)$$

式(23)可写为

$$\ln\left(\frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i}\right) = \ln\left(\exp(0) + \sum_{\substack{E_i \subseteq N_i \\ |E_i| \text{ 为偶数}}} \exp\left(\sum_{l \in E_i} -|L_l|\right)\right) -$$

$$\ln\left(\sum_{\substack{E_i \subseteq N_i \\ |E_i| \text{ 为奇数}}} \exp\left(\sum_{l \in E_i} -|L_l|\right)\right) \approx$$
$$\max\left\{0, x: x \in \left\{\sum_{\substack{l \in E_i, E_i \subseteq N_i \\ |E_i| \text{ 为偶数}}} -|L_l|\right\}\right\} -$$
$$\max\left\{x: x \in \left\{\sum_{\substack{l \in E_i, E_i \subseteq N_i \\ |E_i| \text{ 为奇数}}} -|L_l|\right\}\right\} =$$
$$0 - \left(-\frac{4}{N_0} |r_i|_{\min}\right) = \frac{4}{N_0} |r_i|_{\min} \quad (25)$$

式中： $|r_i|_{\min} = \min_{l \in N_i} \{|r_l|\}$ 。证毕。

定理 2 WMLG 译码算法等价于 max-log MAP 译码算法。

证明 根据引理 1, 式(18)成立, 从而式(19)成立, 即与 WMLG 算法的传统推导结果一致, 由此可得 WMLG 算法等价于 max-log MAP 算法。证毕。

3 复杂度比较与仿真

从上面的分析可知, MAP 译码的复杂度主要源于式(11)中的实数乘法运算、式(13)中的实数除法与对数运算, 以及式(14)中的指数与实数除法运算, 而 WMLG 算法中仅有比较的操作, 没有上述运算过程。表 1 给出了 WMLG 与 MAP 译码的运算复杂度比较。考虑到加减运算的复杂度远低于上述几种运算, 表中未给出加减运算的比较。

表 1 WMLG 与 MAP 译码的运算复杂度比较

运算类型	MAP	WMLG
实数乘法	$m(\rho-1)$	0
实数除法	$n\gamma+n$	0
指数运算	n	0
对数运算	$n\gamma$	0
实数比较	0	$m(\rho-1)$

存储开销也是复杂度的重要指标。若只考虑实数的浮点存储, 则在 MAP 算法中, 需要存储 n 个接收值和对应的概率, 以及 m 个校验方程对应的 α_i , 而 WMLG 算法需要存储 n 个接收值和 m 个校验方程对应的 $|r_i|_{\min}$ 。假设采用 b bit 量化, 表 2 给出了 WMLG 与 MAP 译码的存储开销比较。

表 2 WMLG 与 MAP 译码的存储开销比较

参数	MAP	WMLG
存储开销/bit	$2nb+mb$	$nb+mb$

从上面的比较可以看出, 无论是运算复杂度还是存储开销, WMLG 算法的优势都是明显的。

由于 WMLG 算法是次最优算法, 在性能方面必然有一定损失。仿真分别选择结构性的(255,

175) 欧氏几何 (EG) LDPC 码^[2] 和随机构造的 MacKay (408, 204) LDPC 码^[15], 采用 BPSK 调制, 在 AWGN 信道中传输, 接收端采用 WMLG 和 MAP 译码算法分别译码。图 1 给出了 WMLG 与 MAP 算法的译码性能比较。从图中可见, 与 MAP 算法相比, WMLG 算法的性能损失非常小, 这种几乎可以忽略的损失, 与 max-log MAP 相对 MAP 译码的损失是一致的^[14]。

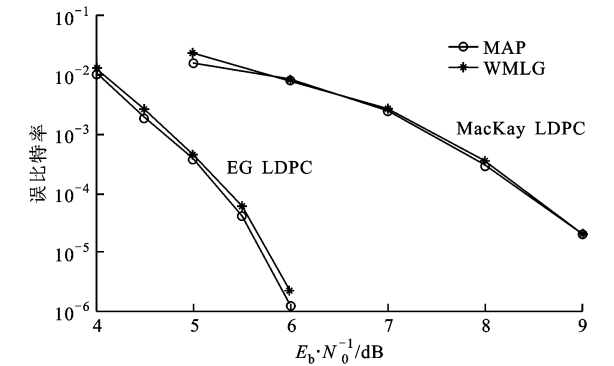


图 1 WMLG 与 MAP 译码算法性能比较

4 结 论

本文通过一种新的方法证明了 WMLG 译码与 max-log MAP 译码的等价性, 这种等价关系从全新视角诠释了 WMLG 算法, 进一步揭示了其物理意义。同时, 仿真结果也表明, WMLG 算法相比 MAP 算法的性能损失几乎可以忽略, 但复杂度却大大降低, 较好地实现了性能与复杂度的折中。

因此, 将基于 WMLG 译码的混合译码算法看作 max-log MAP 译码的改进形式, 对于设计新型混合译码算法、更好地实现性能与复杂度的折中, 具有一定的指导意义。

参考文献:

[1] GALLAGER R G. Low density parity check codes [J]. IRE Transactions on Information Theory, 1962, 8(1): 21-28.

[2] KOU Y, LIN S, FOSSORIER M. Low density parity check codes based on finite geometries: a rediscovery and more [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, 47(11): 2711-2736.

[3] ZHANG Juntan, FOSSORIER M. A Modified weighted bit-flipping decoding of low-density parity-check codes [J]. IEEE Communications Letters, 2004, 8(3): 165-167.

(下转第 50 页)